Mehrdim. Konvergenz und Stetigkeit

Theorem 1.1.2 $\forall x,y,a,b,c \in \mathbb{R}^n$:
$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$
$|\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$
$d(a,c) \leqslant d(a,b) + d(b,c)$
Gleichheit impliziert Gerade

Konvergenz, Cauchy, Beschränkt:
$a(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n, a_\infty \in \mathbb{R}^n$.
$a(n) \xrightarrow[n\infty]{} a_\infty \Leftrightarrow d(a(n), a_\infty) \xrightarrow[n\infty]{} 0$
a Cauchy $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N}:$
$\forall m,p \geqslant N : \|a(m) - a(p)\| < \varepsilon$
a beschränkt $\Leftrightarrow a(\mathbb{N})$ beschränkt
$A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt $\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{R}^n$:
$\exists r > 0 : A \subset B(p,r)$

Theorem 1.1.4
$\forall x,y : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n, \forall a,b \in \mathbb{R}^n; \lambda,\mu \in \mathbb{R}$:
$x(m) \xrightarrow[m\infty]{} a \Leftrightarrow x_k(m) \xrightarrow[m\infty]{} a_k \forall k \in \mathbb{N}_n^*$
$x(m) \xrightarrow[m\infty]{} a,\ y(m) \xrightarrow[m\infty]{} b$
$\Rightarrow (\lambda x + \mu y)(m) \xrightarrow[m\infty]{} \lambda a + \mu x$
$\Rightarrow \langle x(m), y(m)\rangle \xrightarrow[m\infty]{} \langle a,b\rangle$
Cauchyheit ist koordinatenweise, $\mathbb{R}^n$ ist vollständig.
Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ hat konv. Teilfolge.

Supremumsnorm:
$\|x\|_\infty := \sup\{x_j | j \in \mathbb{N}_n^*\}$
Äquivalenz: $\|x\|_\infty \leqslant \|x\| \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty$

Normierte Räume
Norm: Homogen, Definit, Dreiecksungleichung. Vollständiger normierter Raum heißt *Banachraum*.
p**-Normen**:
Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $n \in \hat{\mathbb{N}}$, $V := \mathbb{K}^{\mathbb{N}_n}$.
Für alle $p \in [1,\infty)$ ist

$$\|\cdot\|_p : v \in V \mapsto \left(\sum_{k \in \mathbb{N}_n} |v_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

eine Norm.
Abbildungen A zwischen metrischen Räumen (V,N_1), (W,N_2) heißen *Isometrien*, wenn $N_1 = N_2 \circ A$.
Theorem 1.2.3 $\|\cdot\|_p$ ist *stetig* und *monoton fallend* in p. Geraden sind *Kürzeste* bezüglich $\|\cdot\|_p$. Für $p \in (1,\infty)$ sind Kürzeste *eindeutig* bezüglich der Endpunkte, ansonsten gibt es unendlich viele. Es gibt keine Isometrien für $p \neq q$.

Starke Äquivalenz:
Seien $N_1, N_2 : V \to \mathbb{R}$ Normen. Sie heißen *stark äquivalent* $:\Leftrightarrow \exists c, C > 0$:
$cN_2(v) \leqslant N_1(v) \leqslant CN_2(v) \forall v \in V$
Das ist eine ÄR. Alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind paarweise stark äquivalent (gegenteilig für $n = \infty$!). Konvergenz und Cauchyheit sind unabh. vom Repräsentanten einer ÄK.

Induktion durch Skalarprodukt:
Eine Norm wird durch ein SP induziert gdw $\forall x,y \in V$:
$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$
Polarisierung:
$\mathbb{K} = \mathbb{R} \Rightarrow \langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$
$\mathbb{K} = \mathbb{C} \Rightarrow \langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$
$-\frac{i}{4}(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)$
Nur für $p = 2$ wird $\|\cdot\|_p$ durch SP induziert.

Matrixnormen:
Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$.
$\langle A,B\rangle_F := \langle A,B\rangle_{HS} := \mathrm{tr}(A^T \cdot B)$
$\|A\|_{\mathrm{op}} = \sup\{\|Av\| : \|v\| \leqslant 1\}$
Die beiden Normen sind submultiplikativ, d.h.: $N(A \cdot B) \leqslant N(A) \cdot N(B)$.
Der Grenzwert ist Multiplikationsverträglich für submult. Normen.
Theorem 1.2.9 Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $N(A) < 1$, N submult. Dann ist Folgendes wohldefiniert und gilt:
$\sum_{j=1}^\infty A^j = (I_n - A)^{-1}$
Theorem 1.2.10 Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$.
$\exists \exp(A) := \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{j!} A^j$
$AB = BA$
$\Rightarrow \exp(A+B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$
$\exp(\mathbb{K}^{n\times n}) \subset \mathrm{Gl}(m, \mathbb{K})$,
$(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$
$\exp(BAB^{-1}) = B\exp(A)B^{-1}$
$\exp(A) = \lim_{n\to\infty}\left(I_m + \frac{1}{n}A\right)^n$
$(\exp(A))^T = \exp(A^T)$

Metrische Räume
Metrik: Definit, Symmetrisch, Dreiecksungleichung. Jede Norm induziert eine Metrik. Falls (X,d) metr. Raum, $f : X \to Y$ injektiv, dann ist $(Y, d \circ f)$ metr. Raum. So auch $(A \subset X, d|_A)$.
Euklidische Produktmetrik: Seien (X_i, d_i) n metr. Räume, dann ist $(\times_{i=1}^n X_i, \sqrt{\sum_{i=1}^n d_i^2})$ metr. Raum.

Bälle, Konvergenz, Cauchy:
$B(p,r) := \{q \in X | d(p,q) < r\}$
$a(n) \xrightarrow[n\infty]{} a_\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N}$:
$a(\mathbb{N}_{\geqslant N}) \subset B(a_\infty, \varepsilon)$
Theorem 1.3.4 Alle Konvergenten Folgen in X sind Cauchy. Alle Cauchyfolgen sind beschränkt. Der Limes einer konv. Folge ist eindeutig. Jede Cauchyfolge, die eine gegen b konv. TF besitzt, konvergiert selbst gegen b. Der Grenzwert ist invariant unter Umordnungen, dann TF.
Äquivalenz von Metriken wie bei Normen.

Stetigkeit in metr. Räumen:
Seien X,Y metr. Räume, $f : X \to Y$, $b \in X$. f heißt *stetig* an b
$:\Leftrightarrow \forall a : \mathbb{N} \to X : a(n) \xrightarrow[n\infty]{} b$
$\Rightarrow (f \circ a)(n) \xrightarrow[n\infty]{} f(b)$
Theorem 1.3.6 $f : X \to Y$ stetig an $x \in X$ bzgl. d_X, d_Y
$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0$:
$f(B(x,\delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$
Theorem 1.3.7 Konstante Abb., die Identität, Einschränkungen stetiger Fkt., Verknüpfungen stetiger Fkt., Summe, Produkt und Quotient stetiger Fkt., Lineare Abb., Polynome und rationale Fkt. sind stetig.
Theorem 1.3.8 Lokalität von Stetigkeit: $f|_{B(x,r)}$ stetig, dann f stetig an x.
Theorem 1.3.9 Sei $a \in (M \subset \mathbb{C})^{\mathbb{N}}$. Wenn jede TF von a eine TF besitzt, die gegen $x \in X$ konvergiert, konvergiert auch a gegen x.
Theorem 1.3.10 Die Metrik $d : M \times M \to \mathbb{R}$ ist stetig.
Theorem 1.3.11 $\circ$, $\det$ und $\exp$ sind stetig auf $\mathbb{K}^{n\times n}$, $(\cdot)^{-1}$ auf $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{K})$.
Theorem 1.3.12 Stetigkeit ist koordinatenweise im Zielraum: $f : M \to \mathbb{R}^n$ stetig
$\Leftrightarrow f_j := \mathrm{pr}_j \circ f$ stetig $\forall j \in \mathbb{N}_n^*$

Offen, Abgeschlossen:
$A \subset X$ offen in $X \Leftrightarrow \forall p \in A$:
$\exists r > 0 : B^X(p,r) \subset A$
$A \subset X$ abgeschlossen in X
$\Leftrightarrow X \backslash A$ offen
Offene Bälle ($\leqslant$) sind offen, Bälle mit $<$ sind abg. Endliche Teilmengen sind abg. X und $\varnothing$ sind offen und abg.
Theorem 1.3.15 Endliche Schnitte und bel. Vereinigungen offener Teilmengen sind offen.
Theorem 1.3.16 Seien X, Y metr. Räume. $f : X \to Y$ ist stetig $\Leftrightarrow f^{-1}(U)$ offen (abg.) $\forall U$ offen (abg.).
Theorem 1.3.17 $A \subset X$ und $U \subset A$. U ist offen $\Leftrightarrow \exists V \subset X$ offen mit $U = A \cap V$
Theorem 1.3.18 $A \subset X$ abg. $\Leftrightarrow \forall a \in A^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} a(n) \in X \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a(n) \in A$

Abschluss:
$\overline{A} = \mathrm{cl}(A) := \left\{\lim_{n\to\infty} a | a \in A^{\mathbb{N}}\right\}$
Theorem 1.3.21 $\overline{A}$ ist die minimale abg. Obermenge von A.

Kompakte und Zusammenhängende metrische Räume

Folgenkompaktheit:
X folgenkpt $\Leftrightarrow \forall a \in X^{\mathbb{N}} : \exists$ konv. TF
Theorem 1.4.2 Stetige Fkt. nehmen auf folgenkpt. Räumen Minimum und Maximum an.
Theorem 1.4.4 Sei P nichtkonst. Polynom über $\mathbb{C}$. Dann $0 \in P(\mathbb{C})$.
Theorem 1.4.5 P von Grad $n \geqslant 1$.
$P(z) = a_n(z - \xi_1)\cdots(z - \xi_n)$

Überdeckungen und Kompaktheit:
$\{U_i \subset X | i \in I\}$ heißt (offene) *Überdeckung* (Ü) von $X \Leftrightarrow \forall x \in X : \exists i \in I$: $x \in U_i$. Wenn $J \subset I$ heißt $\{U_j | j \in J\}$ ggf. *Teilüberdeckung* (TÜ).
X *kpt* $\Leftrightarrow$ Jede offene Ü hat endl. TÜ.
X *totalbeschränkt* $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N}$:
$\exists p_1, ..., p_n \in X : \bigcup_{i=1}^n B(p_i, \varepsilon) = X$
Theorem 1.4.7 $\forall X$ metr. Räume
X kpt $\Leftrightarrow X$ folgenkpt $\Leftrightarrow X$ vollständig und totalbeschränkt
Theorem 1.4.8 $A \subset X$ kpt $\Rightarrow A$ abgeschlossen und beschränkt
Theorem 1.4.9 $B \subset X$ kpt $\Rightarrow$ Alle abgeschlossenen $A \subset B$ kpt
Theorem 1.4.10 X_i kpt, dann $\times_{i=1}^n X_i$ kpt.
Theorem 1.4.12 X,Y metr. Räume, $f \in \mathcal{C}^0(X,Y)$. Dann f(X) kpt.
Theorem 1.4.13 X,Y mR, X kpt. $f \in \mathcal{C}^0(X,Y)$ bij. Dann $f^{-1} \in \mathcal{C}^0(X,Y)$.
(f heißt dann *Homöomorphismus*)

Zusammenhängend:
X *zsh.* $:\Leftrightarrow \nexists U,V \subset X : X = U \cup V$ mit U,V offen, nichtleer, disjunkt.
Theorem 1.4.15 $A \subset X$ zsh. wenn $\nexists U,V \subset X$ mit $A \subset U \cup V$.
Theorem 1.4.16 $A \subset \mathbb{R}$ zsh. $\Leftrightarrow A$ Iv
Theorem 1.4.17 X,Y mR, $f \in \mathcal{C}^0(X,Y)$. X zsh. $\Rightarrow f(X)$ zsh.

Wegzusammenhängend:
X wegzsh. $\Leftrightarrow \forall a,b \in X \exists c : a \rightsquigarrow b$.
Theorem 1.4.19 $U \subset X$ offen. U zsh. $\Leftrightarrow U$ wegzsh., c sogar stückweise affin wählbar.
Theorem 1.4.20 X,Y mR, $f \in \mathcal{C}^0(X,Y)$. X wegzsh. $\Rightarrow f(X)$ wegzsh.
Theorem 1.4.21 $K \subset \mathbb{R}^n$ abg. und konvex. $P_K : \mathbb{R}^n \to K$ Lp mit LK 1.

Kontraktion:
$f : X \to X$ *kontrahierend* $\Leftrightarrow f$ Lp mit $LK < 1$
Theorem 1.4.23 X vollst., $f : X \circlearrowleft$ kontr. Dann $\exists!$ Fixpunkt x_F von f.
$a : n \mapsto x_n := f^{\circ n}(x_0)$, $x_0 \in X$ bel. Dann $a \xrightarrow[n\infty]{} x_F$.
Theorem 1.4.24 Sei $A \in \mathrm{Gl}(n), r > 0, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}^n, f : B(a,r) \to \mathbb{R}^n$, sodass $F : B(a,r) \to \mathbb{R}^n, F(x) := x - A^{-1}f(x)$ Lp mit LK 1 ist, und $\left\|A^{-1}f(x)\right\| < r/2 \forall x \in B(a,r)$. Dann hat f genau eine Nullstelle x_0 und $F^{\circ n}(x) \xrightarrow[n\infty]{} x_0 \forall x \in B(a,r)$.

Gleichmäßige Stetigkeit
$f : X \to Y$ *glm. stetig*
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in X$:
$f(B(x,\delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$
f Lp mit LK $L \Leftrightarrow d(f(x), f(y))$
$\leqslant L \cdot d(x,y) \forall x,y \in X$.
Theorem 1.5.3 f glm. stetig, dann $f \circ a$ Cauchy $\forall a \in X^{\mathbb{N}}$ Cauchy.
Theorem 1.5.4 $f \in \mathcal{C}^0(X,Y)$, X kpt. Dann f glm. stetig.
Theorem 1.5.5 $f : A \subset X \to Y$ glm. stetig, Y vollst. Dann $\exists$ stetige Erweiterung von f auf $\mathrm{cl}(A)$.

Dichtheit:
$D \subset M$ *dicht* bei $x \in M \Leftrightarrow x \in \overline{D}$.
Theorem 1.5.7 Die stetige Erweiterung ist immer eindeutig.

Konvergenz von Funktionenfolgen
$n \mapsto f_n : X \to Y$ *konv. punktweise* gegen $f_\infty \Leftrightarrow f_n(x) \xrightarrow[n\infty]{} f_\infty(x) \forall x \in X$.

Gleichgradige Konvergenz:
$\delta_{\sup}(f,g) := \sup\{d(f(x), g(x) | x \in X\}$
$d_{\sup}(f,g) = \frac{\delta_{\sup}(f,g)}{1+\delta_{\sup}(f,g)} \xrightarrow{\delta_{\sup}\to\infty} 1$
$f_n \xrightarrow[n\infty]{} f_\infty \Leftrightarrow \delta_{\sup}(f, f_\infty) \xrightarrow[n\infty]{} 0$
$\Leftrightarrow d_{\sup}(f, f_\infty) \xrightarrow[n\infty]{} 0$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N$:
$\forall x \in X : d(f(x), g(x)) < \varepsilon$
Theorem 1.6.4 Der Raum der stetigen Funktionen ist vollst. bzgl. $d_{\sup}$. Konvergenz gleichgradig, dann punktweise.
Theorem 1.6.6/7 Potenzreihen konvergieren gleichgradig in $D \subset B(0, KR)$. Der Grenzwert ist in $B(0,KR)$ stetig.
Theorem 1.6.10 $a \in \mathbb{R}^+$. Die Menge der Polynomfunktionen auf $A := [-a,a]$ liegt dicht in $\mathcal{C}^0(A, \mathbb{R})$.

Mehrdim. Differentialrechnung

$U \subset \mathbb{R}^m$ offen. $f : U \to \mathbb{R}^n$ *differenzierbar* an $a \in U$ mit *Differenzial* L
$:\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L\cdot h}{\|h\|} = 0$
Theorem 2.1.2 $L = d_p f$ eindeutig:
$d_p f(h) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$
$d_p f(h) = \frac{d}{dt}(f \circ c)(0), \quad c(t) = a + th$
Theorem 2.1.3 $\|Lw\| \leqslant \|L\| \cdot \|w\|$
Theorem 2.1.4 Konstante Abb., Lineare Abb., Restriktionen, Summen, Produkte und Quotienten diff'barer Fkt., Polynome sind diff'bar. Diff'bar, dann stetig.
$d_a(g \circ f) = d_{f(a)} g \circ d_a f$
Falls f^{-1} diff.: $d_{f(a)} f^{-1} = (d_a f)^{-1}$
Theorem 2.1.5 $\forall x \in \mathbb{R}$:
$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
Theorem 2.1.6 $\forall x \in \mathbb{R}$:
$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$
Theorem 2.1.7 $M \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : M \to \mathbb{R}$ diff'bar an $x_0 \in M$. Wenn x_0 lokales Extremum, dann x_0 kritischer Punkt von f.
Das Differential ist koordinatenw. im Zielraum (f diff. $\Rightarrow f_i$ diff. $\forall i \in \mathbb{N}_n^*$) und falls es existiert, koordinatenw. im Definitionsgebiet.

Partielle Ableitungen
Die i*-te partielle Abl.* an a ist
$\partial_i f := \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t}$.
$f \in \mathcal{C}^n(U \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) :\Leftrightarrow$ alle partiellen Abl. vom Grad $\leqslant n$ existieren und sind stetig.
Theorem 2.3.1 Falls f diff'bar an a in alle e_i und $\partial_i f$ stetig $\forall i \in \mathbb{N}_m^*$, dann f diff'bar an a mit
$d_a f = (\partial_1 f, ..., \partial_m f)$ ($n \times m$-Matrix).
Theorem 2.5.1 $p \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$.
$f_n : B(p,r) \to \mathbb{R}^n$ diff'bar $\forall n \in \mathbb{N}$.
1. $\exists x_0 \in B(p,r) : n \mapsto f_n(x_0)$ konv.
2. $n \mapsto f_n' \xrightarrow[n\infty]{d_{\sup}} g \in \mathrm{Abb}(B(p,r), \mathbb{R})$.

Dann:
1. $n \mapsto f_n \xrightarrow[n\infty]{d_{\sup}} f_\infty \in \mathrm{Abb}(B(p,r), \mathbb{R})$.
2. f_∞ diff'bar mit $f_\infty' = g$

Theorem 2.5.2 Grenzwerte von Potenzreihen sind im KR glatt. Es darf unter dem Reihenzeichen differenziert werden.

Konvexität
$U \subset V$ (VR) *konvex* $:\Leftrightarrow \forall x,y \in U$: $\forall \lambda \in [0,1] : \lambda x + (1-\lambda)y \in U$.

$f: U \to \mathbb{R}$ *oberhalbkonvex (konvex)* $:\Leftrightarrow o(f) := \{(u,r)|u \in U, r \geqslant f(u)\}$.
Analog unterhalbkonv. (konkav).
Theorem 2.6.3 $\lambda \in (0,\infty)^n$ mit $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$. $f: U \to \mathbb{R}$ konvex. $u \in U^n$. Dann:
$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k u_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(u_k)$$
Theorem 2.6.5 $n \in \mathbb{N}^*$, $p,q > 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. $\forall x,y \in \mathbb{K}^n$: $\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q$.

Differential, Gradient, Hesse-Matrix

$f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ in $p \in U$ partiell diff'bar. *Jacobi-Matrix* von f in p:
$$J_p f := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{ij} = d_p f \text{ falls } f \text{ diff.}$$
$(m \times n)$-Matrix. Zeilenvektoren von $J_p f$ sind die Gradienten der f_i. Falls $m = 1$, heißt $J_p f$ Gradient $\nabla_p f$.
Theorem 2.7.3 $\nabla_p f$ zeigt in Richtung des stärksten Anstieges und steht senkrecht auf Niveauflächen.
Theorem 2.7.5 $f \in \mathcal{C}^n(U,\mathbb{R}^m)$. Dann partielle Abl. vom Grad $\leqslant n$ unabh. der Reihenfolge. Z.B. $\partial_{12} f = \partial_{21} f$.
Hesse-Matrix:
$f \in \mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$. *Hesse-Matrix* von f:
$$\mathrm{Hess}_p f = D_p^2(f) := \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right)_{ij}$$
($n \times n$-Matrix)

Taylorformel

Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^k$. $|\alpha| := \|\alpha\|_1$. $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_k!$. Für $y \in \mathbb{R}^k$: $y^\alpha := y_1^{\alpha_1} \cdots y_k^{\alpha_k}$.
$\partial_\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \cdots (\partial x_k)^{\alpha_k}}$.
Taylorpolynom n-ter Ordnung:
$U \subset \mathbb{R}^n$. $f \in \mathcal{C}^n(U,\mathbb{R})$. *Taylorpolynom n-ter Ordnung* von f in p:
$$T_n(f,p)(x) := \sum_{|\alpha| \leqslant n} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(p)(x-p)^\alpha$$
$$T_1(f,p)(x) = f(p) + \left\langle \nabla_p f, x-p \right\rangle$$
$$T_2(f,p)(x) = f(p) + \left\langle \nabla_p f, x-p \right\rangle + \tfrac{1}{2}(x-p) \cdot D_p^2 f \cdot (x-p)^T$$
Theorem 2.8.3 $f \in \mathcal{C}^{n+1}(U,\mathbb{R})$. $p,x \in U$ mit $\overline{px} \in U$. Dann $\exists \xi \in \overline{px}$ mit $p \neq \xi \neq x$: $f(x) = T_n(f,p)(x)$
$$+ \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^\alpha}(\xi) \cdot (x-p)^\alpha$$

Lokale Extrema reellwertiger Fkt.

$U \subset \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$. f hat lokales Minimum in $p :\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0: \forall x \in U: x \in B_\varepsilon^U \Rightarrow f(x) \geqslant f(p)$. Analog striktes Minimum und Maximum.
p *kritischer Punkt* $:\Leftrightarrow d_p f = 0$. Sonst *regulärer Punkt*. $\mathrm{crit}\, f := \{x \in U | d_x f = 0\}$.
Theorem 2.9.4 $f \in \mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$. $p \in U$ lok. Max. von $f \Rightarrow p \in \mathrm{crit}\, f$ und $D_p^2 f \leqslant 0$.
$p \in \mathrm{crit}\, f$ und $D_p^2 f < 0 \Rightarrow p$ striktes lok. Max. von f. Analog Minima.
Positiv/negativ definit mit Vz. der Eigenwerte oder $\det$ Hauptminor.

Satz des lokalen Diffeomorphismus

$U,V \subset \mathbb{R}^n$. $f: U \to V$ *Diffeomorphismus* $:\Leftrightarrow f$ $\mathcal{C}^1$, bij. und f^{-1} $\mathcal{C}^1$.
Lokaler Diffeo: offene Umgeb. $\tilde{U}, \tilde{V}$ um $p \in U, f(p)$ sd $f: \tilde{U} \to \tilde{V}$ Diffeo.
Theorem 2.10.2 $U,V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in U$. $f: U \to V$ Diffeo. Dann $d_p f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Isomorphismus mit: $(d_p f)^{-1} = d_{f(p)} f^{-1}$.
Theorem 2.10.4 $f: U \to \mathbb{R}^n$, $p \in U$, $d_p f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Isomorphismus. Dann f lokaler Diffeo. um p.
Theorem 2.10.5 $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R}^n)$. $d_p f$ Isomorphismus $\forall p \in U$. Dann $V := f(U) \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ist f zusätzlich injektiv, dann $f: U \to V$ Diffeo.

Auflösen von Gl., Implizite Fkt.

Theorem 2.11.1 $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen, $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R}^m)$.
$(a,b) = (x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) \in U$. Wenn:
1. $f(a,b) = 0$ 2. $d_{(a,b)} f|_{\mathbb{R}^m}$ inv., also $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{ij} \neq 0$, Dann:

$\exists U_0 \subset U, A(a) \subset \mathbb{R}^n$ offene Umgeb. von (a,b) und a, $\exists! \varphi: A(a) \to \mathbb{R}^m$:
1. $\varphi(a) = b$
2. $f(x,\varphi(x)) = 0 \forall x \in A(a)$
3. $f^{-1}(0) \cap U_0 = \{x,\varphi(x)|x \in A(a)\}$
4. $\varphi \in \mathcal{C}^1(A(a),\mathbb{R}^m)$, $\forall x \in A(a)$: $\left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i}(x)\right) =$
$$-\left(\frac{\partial f_k}{\partial y_l}(x,\varphi(x))\right)_{k,l}^{-1} \cdot \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x,\varphi(x))\right)$$

Reg. Flächen und Tangentialbündel

$f \in \mathcal{C}^1(U \subset \mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$. *Lösungsmenge* von f: $f^{-1}(\{0\}) \subset \mathbb{R}^n$ heißt *reguläre Fläche*, falls $d_p f$ surjektiv $\forall p \in \mathbb{R}^n$.
Falls $m = 1$, bedeutet das: $\mathrm{crit}\, f \cap f^{-1}(\{0\}) = \varnothing$.
Tangentialraum an $M := f^{-1}(\{0\})$:
$T_p M := \{v \in \mathbb{R}^3 | \exists \gamma: (-\varepsilon,\varepsilon) \to M \text{ diff. mit } \gamma(0) = p \wedge \gamma'(0) = v\}$
Theorem 2.12.2 $f \in \mathcal{C}^1(V \subset \mathbb{R}^3,\mathbb{R})$, $M := f^{-1}(0)$ regulär, $p \in M$. Dann: $T_p M$ ist 2-dim. UVR von $\mathbb{R}^3$ und $T_p M = (\nabla_p f)^\perp$.
Tangentialebene $\mathrm{Tan}_p M := p + T_p M$
Normale $\mathrm{Nor}_p M := p + \langle \nabla_p f \rangle$

Extrema unter Nebenbedingungen

$p \in M$ lokales Minimum von $g: U \to \mathbb{R}$ unter NB $f = 0 :\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0: \forall x \in M \cap B(p,\varepsilon): g(p) \leqslant g(x)$.
Theorem 2.13.3 p lok. Ex. von g auf M, dann: $\exists \lambda \in \mathbb{R}^m: \nabla_p g = \nabla_p \langle \lambda, f \rangle$.
Theorem 2.13.4 f,g $\mathcal{C}^2$. Falls $\exists \lambda \in \mathbb{R}^m$, sodass für $G: U \to \mathbb{R}$, $z \mapsto g(z) - \langle \lambda, f \rangle$ gilt: $\nabla_p G = 0$ und $\forall v \in (\langle \nabla_p f_1,\dots,\nabla_p f_m \rangle)^\perp$ mit $v \neq 0$ gilt $v \cdot \mathrm{Hess}_p G \cdot v^T > 0$. Dann p lok. Min. von g unter NB $f = 0$.

Mehrdim. Integralrechnung

$R \subset P(X)$ ist *Inhaltsmengenring* $\Leftrightarrow \forall A,B \in R: A \cup B \in R, A \setminus B \in R$
Inhaltsmengenring ist *σ-Algebra* $\Leftrightarrow \forall a: \mathbb{N} \to R: \bigcup_{k=0}^\infty a(k) \in R$
$f: R \to [0,\infty]$ *additiv/Inhalt* $\Leftrightarrow f(A \cup B) = f(A) + f(B), A \cap B = \varnothing$
$f: R \to [0,\infty]$ *σ-additiv* $\Leftrightarrow f\left(\bigcup_{k=0}^\infty a(k)\right) = \sum_{k=0}^\infty f(a(k))$
Wenn $a(i) \cap a(j) = \varnothing \forall i \neq j$.
σ-add. f auf σ-Alg. R heißen *Maße*.
$A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leqslant \mu(B)$ (Monotonie)
Theorem 3.1.3 $\nexists \mu: P(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$: $\exists U \in (P(\mathbb{R}^n) \setminus \varnothing)$ offen, $\mu(U) < \infty$ und $\forall V \in P(\mathbb{R}^n): \forall v \in \mathbb{R}^n$:
$\mu(V+v) = \mu(V)$
und $\mu(P(\mathbb{R}^n) \neq \{0\}$

Das Jordan-Volumen

Intervalle auf $\mathbb{R}^n$:
$a,b \in \mathbb{R}^n$. $a \leqslant b :\Leftrightarrow a_i \leqslant b_i \forall i \in \mathbb{N}_n^*$
$[a,b] = \{x \in \mathbb{R}^n | a \leqslant x \leqslant b\} = \times_{i=1}^n [a_i,b_i]$
Quader $Q(\mathbb{R}^n) := \{[a,b]|a,b \in \mathbb{R}^n\}$
$\mu_n([a,b]) := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$
$\exists k \in \mathbb{N}_n^*: a_k = b_k \Rightarrow \mu_n([a,b]) = 0$.
Partitionen:
$Q \in Q(\mathbb{R}^n)$, $A \subset Q$.
$\mathrm{Part}(Q) := \{P = (P_1,\dots,P_n)^T,$
$P_i = (a_i, x_i^1, \dots, x_i^{l_i}, b_i)|$
$l_i \in \mathbb{N}, a_i \leqslant x_i^1 \leqslant \dots \leqslant x_i^{l_i} \leqslant b_i\}$
$R(P) = \{(j_1,\dots,j_n)|j_i \in \mathbb{N}_{l_i+1}^*\}$
$Q_j := \times_{i=1}^n [x_i^{j_i-1}, x_i^{j_i}]$
$R^-(P,A) := \{j \in R(P)|Q_j \subset \mathrm{int}\, A\}$
$R^+(P,A) := \{j \in R(P)|Q_j \cap \overline{A} \neq \varnothing\}$
$\mu_n^-(A,Q,P) = \sum_{j \in R^-(P,A)} \mu_n(Q_j)$
$\mu_n^+(A,Q,P) = \sum_{j \in R^+(P,A)} \mu_n(Q_j)$
$\mu_n^-(A) := \sup\{\mu_n^-(A,Q,P)|A \subset Q\}$
$\mu_n^+(A) := \inf\{\mu_n^+(A,Q,P)|A \subset Q\}$
$\forall A \in D(\mathbb{R}^n): \mu_n^-(A) \leqslant \mu_n^+(A)$.
Jordan-Messbarkeit:
$A \in D(\mathbb{R}^n)$ *Jordan-messbar* $:\Leftrightarrow \mu_n^-(A) = \mu_n^+(A) =: \mu_n(A)$
$J(\mathbb{R}^n) := \{A \in D(\mathbb{R}^n)|A \text{ Jordan-m.}\}$
Theorem 3.2.1 $\forall A \in D(\mathbb{R}^n)$:
A Jordan-messbar $\Leftrightarrow \mu_n^+(\partial A) = 0$.
$J(\mathbb{R}^n)$ Inhaltsmengenring, μ_n Inhalt
Beispiele:
$\varphi: K \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ stetig, K kpt. $\mu_n(\{(x,\varphi(x))|x \in K\}) = 0$.
Durch einfache, stückw. $\mathcal{C}^1$-Kurven beschr. Gebiete sind Jordan-m. Durch Riemann-integ. Fkt. eingeschränkte Flächen sind Jordan-m.

Flächeninhalt ebener Gebiete

$\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ (umschließt $\Omega \subset \mathbb{R}^2$)
einfach $:\Leftrightarrow \gamma|_{(a,b)}$ injektiv
geschlossen $:\Leftrightarrow \gamma(a) = \gamma(b)$
pos. or. $:\Leftrightarrow i\gamma'$ zeigt nach $\mathrm{int}\, \Omega$
Theorem 3.2.4 $\gamma(t) = (x(t),y(t))$.
$$\mu_2(\Omega) = -\int_a^b y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b y'(t)x(t)\,\mathrm{d}t$$
Theorem 3.2.5 $\gamma(t) = r(t)e^{i\varphi(t)}$.
$$\mu_2(\Omega) = \tfrac{1}{2}\int_a^b r^2(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$
Theorem 3.2.6 Ω begrenzt durch Strahlen L_α, L_β. $r = r(\varphi)$, $\varphi(t)$ sms.
$$\mu_2(\Omega) = \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

Mehrdim. Riemann-Integral

$Q \in Q(\mathbb{R}^n)$. $f: Q \to \mathbb{R}$ beschränkt.
$\overline{S}(f,P) = \sum_{j \in R(P)} \sup(f|_{Q_j})\mu_n(Q_j)$
$\underline{S}(f,P) = \sum_{j \in R(P)} \inf(f|_{Q_j})\mu_n(Q_j)$
f Riemann-int'bar $\Leftrightarrow f \in R(Q)$
$:\Leftrightarrow \sup_P \underline{S}(f,P) = \inf_P \overline{S}(f,P) =: \int_Q f(x)\,\mathrm{d}x$
Theorem 3.3.3 Integral linear, monoton; Betrag, Produkt und $\max$/$\min$ int'barer Fkt. int'bar.
Theorem 3.3.4 Bis auf Nullmengen stetige Fkt. int'bar, $A \in J(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \chi_A \in R(Q): \mu_n(A) = \int_Q \chi_A(x)\,\mathrm{d}x$.
Theorem 3.3.6 $A \subset Q$.
$\int_A f(x)\,\mathrm{d}x := \int_Q \chi_A(x) f(x)\,\mathrm{d}x$.
3.3.3 gilt weiterhin. f^+, f^- int'bar.
$$\int_{B \cup C} \mathrm{d}f = \int_B \mathrm{d}f + \int_C \mathrm{d}f - \int_{B \cap C} \mathrm{d}f.$$
Theorem 3.3.7 Standardabsch.:
$$\inf_{x \in A} f(x) \cdot \mu_n(A) \leqslant \int_A f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sup_{x \in A} f(x) \cdot \mu_n(A)$$
Theorem 3.3.8 $f \in \mathcal{C}^0(Q,\mathbb{R})$, $g \in R(Q)$. $0 \notin g(Q)$. Dann $\exists \xi \in Q$: $\int_Q f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \cdot \int_Q g(x)\,\mathrm{d}x$.
$\int_Q f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \cdot \mu_n(Q)$.

Fubini und Cavalieri

Theorem 3.4.1 $Q_1 \in Q(\mathbb{R}^n)$, $Q_2 \in (\mathbb{R}^m)$, $Q = Q_1 \times Q_2$. $f \in R(Q)$. Ist $g_x: Q_2 \to \mathbb{R}, y \mapsto f(x,y)$ int'bar $\forall x \in Q_1$, dann $G: Q_1 \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_{Q_2} g_x(y)\,\mathrm{d}y$ int'bar und
$$\int_Q f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{Q_1} \left(\int_{Q_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$
Analog andersherum.
Theorem 3.4.2 $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.
$$\int_Q f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a_1}^{b_1} \dots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x_n\right) \dots \mathrm{d}x_1$$
Gilt auch $\forall \sigma \in S_n$ (Permut.) von $\mathbb{N}_n^*$.
c-Schnitte:
$A \subset \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$.
$A_c^n = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} | (x,c) \in A\}$
Theorme 3.4.4 $A \in J(\mathbb{R}^n)$ mit $A_c^n \in J(\mathbb{R}^{n-1}) \forall c \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^0(A,\mathbb{R})$. $[c_1,c_2] \subset \mathbb{R}: A_c^n = \varnothing \forall c \notin [c_1,c_2]$.
$$\int_A f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{c_1}^{c_2} \left(\int_{A_c^n} f(x,c)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}c.$$
Theorem 3.4.5 $f = 1$, $i \in \mathbb{N}_n^*$:
$\mu_n(A) = \int_{c_1}^{c_2} \mu_{n-1}(A_c^i)\,\mathrm{d}c$.

Transformationsformel

Theorem 3.5.1 $\phi: U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^n$ Diffeo., U,V offen. $f \in \mathcal{C}^0(V,\mathbb{R})$, $A \subset U \in J(\mathbb{R}^n)$. Dann $\phi(A) \in J(\mathbb{R}^n)$ und $\int_{\phi(A)} f(y)\,\mathrm{d}y =$
$$\int_A f(\phi(x)) \cdot |\det J_x \phi|\,\mathrm{d}x.$$

Vektoranalysis

Kurvenintegrale

$C \subset \mathbb{R}^n$ *$\mathcal{C}^k$-Kurvenstück* $:\Leftrightarrow C = \alpha([a,b])$, α einfach, regulär. α heißt *Parametrisierung* von C. Zu zwei Param. $\exists$ Diffeo φ: $\alpha = \beta \circ \varphi$.
Theorem 4.5 α $\mathcal{C}^1$-Param. von C.
$L(C) := L(\alpha) := \int_a^b \|\dot\alpha(t)\|\,\mathrm{d}t$.
Skalare Kurvenintegrale:
$f: C \to \mathbb{R}$, $\exists \alpha: f \circ \alpha$ stetig.
$\int_C f\,\mathrm{d}s := \int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \|\dot\alpha(t)\|\,\mathrm{d}t$
Vektorielle Kurvenintegrale:
$\alpha \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ regulär mit Bild in Ω, $v: \Omega \to \mathbb{R}^n$.
$\int_\alpha v\,\mathrm{d}s := \int_a^b \langle v(\alpha(t)), \dot\alpha(t) \rangle\,\mathrm{d}t$
v konvervativ $:\Leftrightarrow \int_\gamma v\,\mathrm{d}s$ unabh. von γ (γ stückw. $\mathcal{C}^\infty$)$\Leftrightarrow \int_\gamma v\,\mathrm{d}s = 0$ für γ geschl. $\Leftrightarrow \exists u \in \mathcal{C}_1(\Omega,\mathbb{R}): v = \nabla u$
Theorem 4.15 $v = \nabla u \in \mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$.
$\forall i \neq k \in \mathbb{N}_n^*: \partial_k v_i = \partial_i v_k$

Flächenintegrale

$U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $\varphi: U \to \mathbb{R}^3$ *$\mathcal{C}^k$-Flächenparam.* $:\Leftrightarrow \partial_{u_1}\varphi$, $\partial_{u_2}\varphi$ l.un. $\forall u \in U$. (Tangentenvektoren von φ)
$M \subset \mathbb{R}^3$ *$\mathcal{C}^k$-Flächenstück* $:\Leftrightarrow M = \varphi(U)$, φ homöo. Zu zwei Param. $\exists$ Diffeo.
$$G_\varphi(u) := \begin{pmatrix} \langle \partial_{u_1}\varphi, \partial_{u_1}\varphi \rangle & \langle \partial_{u_1}\varphi, \partial_{u_2}\varphi \rangle \\ \langle \partial_{u_2}\varphi, \partial_{u_1}\varphi \rangle & \langle \partial_{u_2}\varphi, \partial_{u_2}\varphi \rangle \end{pmatrix}$$
$$\sqrt{\det G_\varphi(u)} = \|\partial_{u_1}\varphi(u) \times \partial_{u_2}\varphi(u)\|$$
$$\mu_2(M) = \int_U \sqrt{\det G_\varphi(u)}\,\mathrm{d}u$$
Unabhängig der Parametrisierung.
Skalare Oberflächenintegrale:
$f \in \mathcal{C}^0(M,\mathbb{R})$.
$$\int_M f\,\mathrm{d}A = \int_U f(\varphi(u))\sqrt{\det G_\varphi(u)}\,\mathrm{d}u$$
Vektorielle Oberflächenintegrale:
$\int_M v \cdot \mathrm{d}o :=$
$$\int_U \langle v(\varphi(u)), \partial_{u_1}\varphi(u) \times \partial_{u_2}\varphi(u) \rangle\,\mathrm{d}u$$
Mit Einheitsnormalenfeld in Skalarintegral: $\hat{n} = \frac{\partial_{u_1}\varphi(u) \times \partial_{u_2}\varphi(u)}{\|\partial_{u_1}\varphi(u) \times \partial_{u_2}\varphi(u)\|}$
$\langle a, b \times c \rangle = \det(a,b,c)$

Integralsätze

Theorem 4.42 Stokes: $v \in \mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R}^3)$, M Pflaster(-kette) mit Rand ∂M. Dann $\int_M \mathrm{rot}\, v\,\mathrm{d}o = \int_{\partial M} v \cdot \mathrm{d}A$
Theorem 4.46 Green: $v \in \mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R}^2)$, M ebene Pflaster(-kette) mit Rand ∂M. Dann $\int_M (\partial_x v_2 - \partial_y v_1)\,\mathrm{d}(x,y)$
$$= \int_{\partial M} v_1\,\mathrm{d}x + v_2\,\mathrm{d}y$$
Theorem 4.54 Gauß: $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ Gaußsches Gebiet, $v: \Omega \to \mathbb{R}^3$ $\mathcal{C}^1$ in Umgebung von $\overline{\Omega}$. Dann:
$\int_\Omega \mathrm{div}\, v\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} v \cdot \mathrm{d}o$.